Stjärnartikel

En artikel om klotter

Jag brukar klottra stjärnor när jag har papper och penna framför mig. När man ritat några vanliga 5-uddiga stjärnor blir det lätt så att man övergår till stjärnor med fler spetsar än 5. Denna artikels mål är att avgöra vilka stjärnor som går att rita, där jag har min egen bestämda uppfattning av vilka stjärnor som är tillåtna.

Exempel på tillåtna stjärnor:

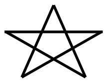

Fig. 1

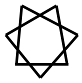

Fig. 2

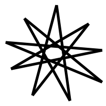

Fig. 3

Exempel på otillåtna stjärnor:

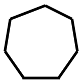

Fig. 4

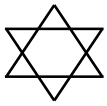

Fig. 5

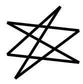

Fig. 6

Vad jag intuitivt menar med en tillåten stjärna är en stjärna som går att rita med ett streck, där varje delstreck går från ett hörn till ett annat, och där spetsvinklarna är lika stora. Detta leder till följande definition:

Definition: ¥(n,m) är en n-uddig stjärna om n,m är heltal, n>1 , 1<m<n-1 , och SGD(n,m)=1.

Idén med definitionen är följande: Skriv talen 0,1,2,3,...,n-1 i en ring. Dra sedan strecket från 0 till m, från m till 2m, från 2m till 3m och så vidare. Eftersom SGD(n,m)=1 kommer man tillbaka till 0 först sedan alla andra hörn knutits samman (dvs stjärnan går att rita i ett streck från hörn till hörn), och stjärnor av typen fig. 4 utesluts på grund av att 1<m<n-1. Att spetsvinklarna är lika stora följer av att man alltid går m steg.

Lemma 1: Det existerar en n-uddig stjärna omm f(n)>2, där f(n) är Euler-funktionen för n.

Bevis: Eftersom SGD(1,n)=SGD(n-1,n)=1 för n>1 följer det att omm f(n)>2 existerar m så att 1<m<n-1, SGD(n,m)=1.

Detta ger följande sats:

Sats 1: För n≠2,3,4,6 existerar m så att ¥(n,m) är en n-uddig stjärna.

Bevis: För n=2,3,4,6 gäller f(n)≤2, så enligt lemma 1 finns inga n-uddiga stjärnor. För n=5 har vi f(5)=4; alltså finns 5-uddiga stjärnor. Antag nu att $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$. Då gäller, enligt känd formel, att $f(n) = p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} \ldots p_r^{a_r-1}(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_r-1)$. Eftersom vi bara behöver bekymra oss om n>6, inses lätt att det gäller att f(n)>2.

Eftersom till exempel ¥(7,3) och ¥(7,4) när de ritas upp ser likadana ut, inför jag följande praxis för resten av artikeln: ¥(n,m) identifieras med ¥(n,n-m) om båda är stjärnor, och jag väljer alltid det lägsta av talen m,n-m som representant för denna stjärna.

Med denna praxis får vi nu följande sats:

Sats 2: För $n>2$ gäller att det finns $(f(n)-2)/2$ olika stjärnor för varje n.

Bevis: Vi vet att $SGD(n,m)=1$, $1<m<n-1$, leder till att ¥(n,m) är en n-uddig stjärna, men eftersom vi identifierar ¥(n,m) med ¥(n,n-m) om båda är stjärnor, så räcker det att visa att $SGD(n,m)=1$ omm $SGD(n,n-m)=1$, eftersom alla stjärnor då har 2 representanter, och $m=n-1$ och $m=1$ inte räknas. $SGD(n,m)=1$ ger att det finns a,b heltal så att $an+bm=1$. Om vi sätter $c=a+b$ och $d=-b$ får vi då $cn+d(n-m)=1$, dvs $SGD(n,n-m)=1$. På samma sätt visar man att $SGD(n,n-m)=1$ implicerar $SGD(n,m)=1$.

Nu inför jag ytterligare en restriktion. Eftersom jag anser att stjärnor av typ fig. 2 inte är vad jag skulle kalla en äkta stjärna eftersom det tredje strecket man drar inte korsar det första, och stjärnan därför inte är "tillräckligt" spetsig,, inför jag följande definition:

Definition: ¥(n,m) är en äkta stjärna om $3m>n$. (Kom ihåg att jag väljer ¥(n,m') som representant för stjärnan, där $m'=\min(m,n-m)$.)

Med denna definiton får man

Sats 3: För $n\neq 2,3,4,6,10$ existerar m så att ¥(n,m) är en äkta stjärna.

Bevis: För att visa att n har en äkta stjärna måste jag visa att det existerar ett m så att:

I, $1<m\leq n/2$ (n/2 pga att jag valt min(m,n-m).)
II, $3m>n$
III, $SGD(n,m)=1$

Jag gör en fallindelning:

n udda: $n=2k+1$, $k\geq 1$. Sätt $m=n/2-1/2$, $a=1$, $b=-2$. Då är $an+bm=1$, dvs $SGD(n,m)=1$.

n jämn: $n=2k$, $k\geq 1$.
k jämn: $k=2l$, dvs $n=4l$. Sätt $m=n/2-1$, $a=1-l$, $b=2l-1$. Då är $an+bm=1$.
k udda: $k=2l+1$. Sätt $m=n/2-2$.
l jämn: $l=2s$. Sätt $a=s$, $b=-1-l$. Då är $an+bm=1$.
l udda: $l=2s+1$. Sätt $a=-s$, $b=2s+1$. Då är $an+bm=1$.

För $n=2,3,4,6,10$ ger ovanstående fallindelning ett m som uppfyller III, men inte både I och II. Eftersom det saknas stjärnor överhuvudtaget för $n=2,3,4,6$ enligt sats 1 kan dessa n heller inte ha en äkta stjärna. För $n=10$ är den enda stjärnan ¥(10,3) men $3*3<10$. Alltså: För $n\neq 2,3,4,6,10$ existerar äkta stjärnor.